Kolloqium Implizite Funktionen **08.11.2007**
Carsten Erdmann

Existenz- und Eindeutigkeitssatz über implizite Funktionen

Wiederholung:

Mittelwertsatz
Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \to \mathbb{R}^m$ eine stetig differenzierbare Abbildung. Sei weiterhin $x \in U$ und $\xi \in \mathbb{R}^n$ ein Vektor derart, dass die ganze Strecke $\{x + t\xi : 0 \le t \le 1\}$ in U liegt. Dann gilt, dass

$$f(x+\xi) - f(x) = \left(\int_0^1 Df(x+t\xi)dt \right) \cdot \xi.$$

Hierbei wird das Integral über die Jacobimatrix $Df(x+t\xi)$ komponentenweise berechnet.

Konvergenzkriterium von Weierstraß
Seien $f_n : K \to \mathbb{C}, n \in \mathbb{N}$, Funktionen mit

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|f_n\|_K < \infty.$$

Dann konvergiert die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ absolut und gleichmäßig auf K gegen eine Funktion $f : K \to \mathbb{C}$.

Satz. Seien $U_1 \subset \mathbb{R}^k$ und $U_2 \subset \mathbb{R}^m$ offene Mengen und

$$\begin{aligned} \text{F: } & U_1 \times U_2 \to \mathbb{R}^m \\ & (x,y) \mapsto F(x,y) \end{aligned}$$

eine stetig differenzierbare Abbildung.

Weiterhin sei $(a,b) \in U_1 \times U_2$ ein Punkt, so dass $F(a,b) = 0$ und die $m \times m$ Matrix $\frac{\partial F}{\partial y}(a,b)$ invertierbar ist.

Dann existiert eine offene Umgebung $V_1 \subset U_1$ von a und $V_2 \subset U_2$ von b und eine stetige Abbildung $g : V_1 \to V_2$ mit

$$F(x, g(x)) = 0 \qquad \forall x \in V_1.$$

Ist $(x,y) \in V_1 \times V_2$ ein Punkt mit $F(x,y) = 0$, so folgt $y = g(x)$.

Beweis.

1. Wir zeigen, dass $F(x,y)=0$ in einer gewissen Umgebung von (a,b)

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit nehmen wir an, dass $(a,b)=(0,0)$.
Wir setzen

$$B := \frac{\partial F}{\partial y}(0,0) \qquad B \in GL(m,\mathbb{R}).$$

Weiterhin definieren wir eine Abbildung $G: U_1 \times U_2 \to \mathbb{R}^m$ durch

$$G(x,y) := y - B^{-1}F(x,y) = y - (\frac{\partial F}{\partial y}(0,0))^{-1}F(x,y). \tag{1}$$

Leiten wir diese partiell nach y ab so folgt

$$\frac{\partial G}{\partial y}(x,y) = 1 - \left(\frac{\partial F}{\partial y}(0,0)\right)^{-1}\frac{\partial F}{\partial y}(x,y)$$

und für $(x,y)=(0,0)$ gilt

$$\frac{\partial G}{\partial y}(0,0) = 1 - \left(\frac{\partial F}{\partial y}(0,0)\right)^{-1}\frac{\partial F}{\partial y}(0,0) = 1-1=0.$$

Laut Voraussetzung sind alle Komponenten der Matrix $\frac{\partial G}{\partial y}$ stetige Funktionen. Aufgrund der Stetigkeit gibt es dann aber auch Umgebungen $W_1 \subset U_1$ und $W_2 \subset U_2$, so dass

$$\left\|\frac{\partial G}{\partial y}(x,y)\right\| \leq \frac{1}{2} \qquad \forall (x,y) \in W_1 \times W_2. \tag{2}$$

Weiterhin sei $r>0$ so definiert, dass

$$V_2 := \{y \in \mathbb{R}^m : \|y\| < r\} \subset W_2.$$

Da offensichtlich $G(0,0) = 0 - (\frac{\partial F}{\partial y}(0,0))^{-1}F(0,0) = 0$, gibt es eine offene Nullumgebung $V_1 \subset W_1$ mit

$$\sup_{x \in V_1} \|G(x,0)\| =: \epsilon < \frac{r}{2}. \tag{3}$$

Aus der Definition (1) folgt, dass $F(x,y)=0$ gleichbedeutend mit $G(x,y)=y$ ist.

2. Existenz einer stetigen Funktion

Wir zeigen, dass es eine stetige Funktion $g : V_1 \to V_2$ gibt mit $F(x, g(x)) = 0$ oder äquivalent dazu

$$g(x) = G(x, g(x)) \qquad \forall x \in V_1.$$

Dazu definieren wir uns induktiv Abbildungen $g_v : V_1 \to V_2$ durch

$$g_0(x) = 0, \quad g_{v+1}(x) := G(x, g_v(x)) \tag{4}$$

mit

$$\|g_{v+1} - g_v\|_{V_1} \leq 2^{-v}\epsilon. \tag{5}$$

Zuerst müssen wir zeigen, dass unsere Abbildungen wohldefiniert sind. Aus

$$g_N = (g_N - g_{N-1}) + (g_{N-1} - g_{N-2}) + ... + (g_1 - g_0) = \sum_{v=0}^{N-1}(g_{v+1} - g_v)$$

und (3) folgt die Abschätzung:

$$\|g_N\|_{V_1} \leq \sum_{v=0}^{N-1} 2^{-v}\epsilon \leq 2\epsilon \overset{(3)}{<} r.$$

Somit gilt $g_N(V_1) \subset V_2$ und die Definition ist sinnvoll.

IA: $v = 0$
Unter zuhilfenahme von (3) folgt, dass

$$\|g_1(x) - g_0(x)\| = \|G(x, g_0(x)) - g_0(x))\| = \|G(x, 0) - 0\| = \|G(x, 0)\| \leq \epsilon$$

IS: $v - 1 \to v$
Nach Definition gilt:

$$g_{v+1}(x) - g_v(x) = G(x, g_v(x)) - G(x, g_{v-1}(x))$$

Wendet man darauf den Mittelwertsatz und (2) an, dann gilt:

$$\begin{aligned}
\|G(x, g_v(x)) - G(x, g_{v-1}(x)\| &= \|G(x, g_{v-1}(x) + \xi) - G(x, g_{v-1}(x))\| \\
&= \left\| \left(\int_0^1 D_2(G(x, g_{v-1}(x) + t\xi))dt \right) \cdot \xi \right\| \\
&\overset{(2)}{\leq} \left\| \left(\int_0^1 \frac{1}{2} dt \right) \cdot \xi \right\| \\
&= \left\| \frac{1}{2}\xi \right\| \\
&= \frac{1}{2} \|g_v(x) - g_{v-1}(x)\| \qquad \forall x \in V_1
\end{aligned}$$

es folgt

$$\|g_{v+1} - g_v\|_{V_1} \leq \frac{1}{2} \|g_v - g_{v-1}\| .$$

Soll heißen, dass sich die Funktionenfolgenglieder immer weiter annähern, hier also eine Cauchyfolge vorliegt. Die Behauptung (5) folgt.

Aus dem obigen Beweis übernehmen wir die Abschätzung , dass die Reihe $\sum_{v=0}^{\infty}(g_{v+1} - g_v)$ die Majorante $\sum_{v=0}^{\infty} 2^{-v}\epsilon$ besitzt.
Nach dem Konvergenzkriterium von Weierstrass konvergiert sie daher gleichmäßig gegen eine Abbildung. Das heißt, dass

$$g := \lim_{N\to\infty} g_N = \sum_{v=0}^{\infty}(g_{v+1} - g_v) \qquad g : V_1 \to \mathbb{R}^m$$

eine stetige Abbildung (nach (4)) ist, für die zusätzlich noch gilt, dass $\|g\|_{V_1} \leq 2\epsilon < r$ also $g(V_1) \subset V_2$.
Aus (4) folgt nun durch Grenzübergang, dass

$$\lim_{v\to\infty} g_{v+1} = \lim_{v\to\infty} G(x, g_v(x)) \Rightarrow g(x) = G(x, g(x)) \qquad \forall x \in V_1$$

was wir eigentlich zeigen wollten.

3. Eindeutigkeit der Funktion g

Wir haben noch zu zeigen, dass unsere gefundene Funktion die einzige ist, die die Gleichung $F(x, g(x)) = 0$ oder äquivalent dazu $G(x, g(x)) = g(x)$ erfüllt.
Nehmen wir also einfach an, dass es zu jedem $x \in V_1$ zwei voneinander verschiedene Lösungen $g(x), h(x) \in V_2$ gibt. Dass hieße dann, dass

$$g(x) - h(x) = G(x, g(x)) - G(x, h(x))$$

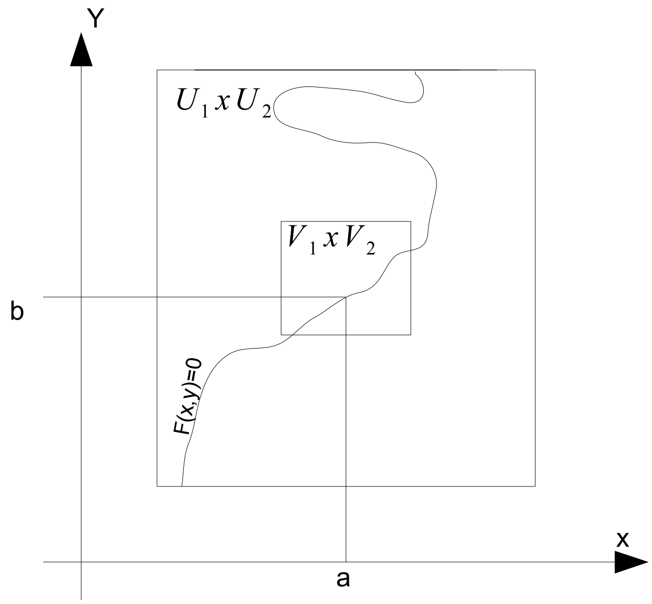
wenn wir jetzt wieder den Mittelwertsatz und (2) darauf anwenden, dann würde aber gelten, dass

$$\|g(x) - h(x)\| \leq \frac{1}{2} \|g(x) - h(x)\| .$$

Dies geht aber nur wenn $g(x) = h(x)$, womit die Eindeutigkeit gezeigt wäre.
Damit ist der Beweis vollständig.

Bemerkungen

1. Man sagt, die Abbildung g entstehe durch Auflösen der Gleichung $F(x,y)=0$ nach y. Für dir Gültigkeit des Satzes ist wesentlich, dass U_1 und U_2 verkleinert werden. In ganz $U_1 \times U_2$ könnte es nämlich zu einem gegebenen x-Wert mehrere y-Werte geben (oder auch gar keinen), die der Gleichung $F(x,y)=0$ genügen.



2. Aus der eben gemachten Bemerkung und den Folgerungen aus Satz 1 folgt, dass die Abbildung g in einer eventuell verkleinerten Umgebung von a sogar stetig differenzierbar ist. Desweiteren gilt für ihre Funktionalmatrix:

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x) = -\left(\frac{\partial F}{\partial y}(x,g(x))\right)^{-1} \frac{\partial F}{\partial x}(x,g(x)).$$

Höhenlinien

Sei $U \subset \mathbb{R}^2$ eine offene Menge und

$$f : U \to \mathbb{R} \qquad (x,y) \mapsto f(x,y)$$

eine stetig differenzierbare Funktion.

Höhenlinien haben wir bereits wie folgt definiert:

$$N_f(c) := \{(x,y) \in U : f(x,y) = c\} \qquad c \in \mathbb{R}$$

Mit Hilfe von Satz 2 kann man nun aber Höhenlinien in der Umgebung eines Punktes, in dem *grad* f nicht verschwindet, genauer beschreiben. Da wir bei Höhenlinien nur Abbildungen von dem $\mathbb{R}^2$ in den $\mathbb{R}$ betrachten, brauchen wir für einen beliebigen Punkt $(a,b) \in U$ aus $N_f(c)$ nur die beiden Fälle $\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) \neq 0$ oder $\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) \neq 0$ (oder eben beides) unterscheiden. Definieren wir jetzt eine Abbildung F durch

$$F(x,y) := f(x,y) - c$$

und wenden Satz 2 darauf an, dann ergeben sich die beiden Fälle:

Fall 1: $\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) \neq 0$

Aufgrund der Voraussetzung existieren offene Intervalle $I_1, I_2 \subset \mathbb{R}$ mit

$$(a,b) \in I_1 \times I_2 \subset U$$

sowie eine stetige differenzierbare Funktion

$$\phi : I_1 \to I_2,$$

so dass

$$N_f(c) \cap (I_1 \times I_2) = \{(x,y) \in I_1 \times I_2 : y = \phi(x)\}.$$

Fall 2: $\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) \neq 0$

Aufgrund der Voraussetzung existieren offene Intervalle $J_1, J_2 \subset \mathbb{R}$ mit

$$(a,b) \in J_1 \times J_2 \subset U$$

sowie eine stetige differenzierbare Funktion

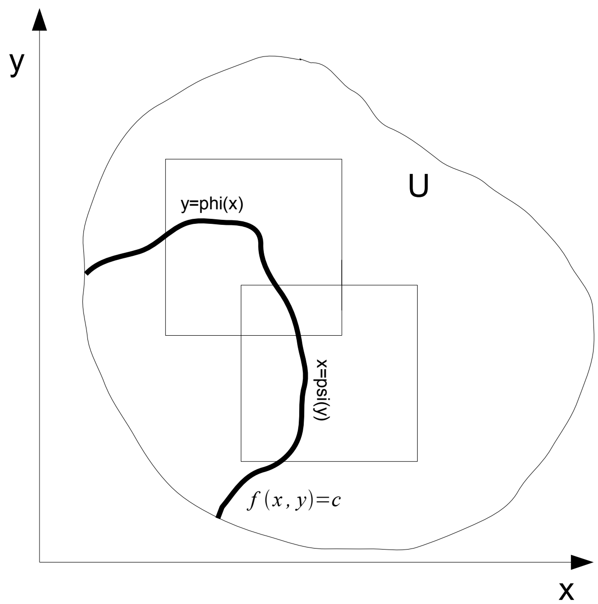
$$\psi : J_2 \to J_1,$$

so dass

$$N_f(c) \cap (J_1 \times J_2) = \{(x,y) \in J_1 \times J_2 : x = \psi(y)\}.$$

Bemerkung

Wir haben also mithilfe des Satzes gezeigt, dass sich Höhenlinien in der Umgebung eines Punktes, in dem der Gradient nicht verschwindet, als Graph einer Funktion darstellen lassen. Diese ist entweder eine Funktion von x oder von y.



Beispiel

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x,y) := 3x + y^2.$$

Dann gilt

$$grad \quad f(x,y) = (3, 2y)$$

Der Gradient verschwindet also in keinem Punkt.

$$N_f(c) = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 3x + y^2 = c\right\}$$

lässt sich also als Vereinigung der folgenden 3 Graphen darstellen

$$\begin{aligned}
\Gamma_1 &:= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = \tfrac{1}{3}(c - y^2)\right\} \\
\Gamma_2 &:= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = -\sqrt{c - 3x}, x \leq \tfrac{1}{3}c\right\} \\
\Gamma_3 &:= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = \sqrt{c - 3x}, x \leq \tfrac{1}{3}c\right\}.
\end{aligned}$$

Literatur

[1] Steven G.Krantz und Harold R.Parks *“The Implicit Function Theorem”*, Birkhäuser, Boston, 2002

[2] Otto Forster *“Analysis 1”*, Vieweg Verlag, Braunschweig, 1996

[3] Otto Forster *“Analysis 2”*, Vieweg Verlag, Braunschweig, 1996

[4] Walter Rudin *“Analysis”*, Oldenbourg Wissenschaftsverlag, München, 2005

[5] I. N. Bronstein und K. A. Semendjajew, *“Taschenbuch der Mathematik”*, Verlag Harri Deutsch, Frankfurt am Main, 2003